RUCH JEDNOSTAJNY PO OKRĘGU

LESZEK W. GUŁA
lwgula@wp.pl

12 STYCZNIA 1997

W ruchu obrotowym wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach wokół prostej zwaną osią obrotu, która jest nieruchoma. Jeżeli obrót jest jednostajny, to prędkość kątowa ω i **prędkość ilorazowa** (częstość obiegów) ν wszystkich punktów należących do ciała są ustalone i nie ulegają zmianie. Prędkość liniowa (obwodowa) υ, prędkość polowa u i przyśpieszenie dośrodkowe (normalne) a_n są także ustalone i dowolne, bo są wartościami różnych funkcji o tym samym argumencie - promieniu r. Najważniejszy przypadek ruchu krzywoliniowego stanowi więc ruch punktu po okręgu ze stałą prędkością υ. Wtedy droga liniowa s przebyta przez punkt umieszczony na końcowym ramieniu kąta φ, droga kątowa φ zakreślona przez promień wodzący r, droga ilorazowa rzeczywista n (liczba obrotów wykonana w czasie $t = nT$ trwania ruchu), pole S wycięte przez promień r i wartość $|\Delta\overrightarrow{\upsilon}|$ przyrostu geometrycznego $\Delta\overrightarrow{\upsilon}$ wektorów prędkości $\overrightarrow{\upsilon}_1$ i $\overrightarrow{\upsilon}_2$ są wprost proporcjonalne do czasu t trwania ruchu, co wyrażają następujące definicje:

$$\Bigg[\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{2\pi rn}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu \ \wedge\ \omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{n\varphi_b}{t} = \frac{\varphi_b}{T} = \varphi_b\nu \ \wedge\ \nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} \ \wedge$$

$$u = \frac{S}{t} = \frac{n\pi r^2}{t} = \frac{\pi r^2}{T} = \pi r^2\nu \ \wedge\ a_n = \frac{|\Delta\overrightarrow{\upsilon}|}{t} = \frac{2\pi\upsilon n}{t} = \frac{2\pi\upsilon}{T} = 2\pi\upsilon\nu\Bigg], \quad (1)$$

gdzie gdzie $\varphi_b = 1$ obr $= 360^0 = 2\pi$ rad.

Droga ilorazowa $n \in \mathbb{R}^+$ i określa, jakim ułamkiem rzeczywistym – bazowej drogi liniowej $2\pi r$, bazowej drogi kątowej φ_b, bazowego czasu (okresu obiegu, 1 obrotu) T, bazowej drogi polowej πr^2 i bazowego przyrostu geometrycznego wektora prędkości $2\pi\upsilon$ jest rozpatrywana odpowiednia wielkość rzeczywista s, φ, t, S, $2\pi\upsilon n$, a mianowicie

$$\boxed{\frac{s}{2\pi r}} = \frac{\upsilon t}{2\pi r} = \boxed{\frac{\varphi}{\varphi_b}} = \frac{\omega t}{\varphi_b} = \frac{t}{T} = n = \frac{S}{\pi r^2} = \frac{ut}{\pi r^2} = \frac{|\Delta\overrightarrow{\upsilon}|}{2\pi\upsilon} = \frac{2\pi\upsilon n}{2\pi\upsilon} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{2\pi\upsilon n}{2\pi\upsilon t} = \frac{\omega}{\varphi_b} = \frac{\upsilon}{2\pi r} \Longrightarrow a_n = \frac{2\pi\upsilon n}{t} = \frac{2\pi\upsilon\upsilon}{2\pi r} = \frac{\upsilon^2}{r}.} \quad (2)$$

Niech ruchu punktu po okręgu będzie zgodny z ruchem wskazówek zegara i: $v = v_1 = v_2$, $\measuredangle P_1OP_2 = \varphi$, $r = |OP_1| = |OP_2|$, punkt P_1 będzie początkiem wektora $\overrightarrow{v}_1$ stycznego do okręgu (O, r) i zarazem początkiem ruchu, a punkt P_2 będzie początkiem wektora $\overrightarrow{v}_2$ stycznego do tego okręgu.

Droga pokonana przez punkt w czasie t jest równa długości łuku $|\widehat{P_1P_2}| = s$. Jeżeli $t = T$, to wektory $\overrightarrow{v}_1$ i $\overrightarrow{v}_2$ pokryją się i wówczas $|\Delta\overrightarrow{v}| = 2\pi v = 2\pi vn$.

Generalnie wnioski wyprowadzamy wtedy, gdy współrzędne wektorów są różne (wektory są różne, bo się nie pokrywają). W punkcie P_2 zaczepiamy początek wektora przyśpieszenia dośrodkowego $\overrightarrow{a}_n$. Będzie on miał zwrot wzdłuż promienia r ku środkowi O okręgu. Wektory $\overrightarrow{v}_2$ i $\overrightarrow{a}_n$ są pod kątem prostym. Mamy $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{v}_2$, bo ich współrzędne są różne.

Z tak opisanego rysunku otrzymujemy potwierdzenie (2)

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\varphi}{\varphi_b}.$$

W ruchu po okręgu hodografem toru punktu jest niewątpliwie również okrąg i często spotykamy się z określeniem "prędkość liniowa mierzona po łuku". Ponieważ prędkość kątowa ω jest wielkością stałą i niezmienną, to wektor $\overrightarrow{v}$ prędkości v umieścimy na promieniu drugiego okręgu równym vt. Tylko tutaj, będąc na "zakręcie" możemy się poczuć pewnie i bezpiecznie. W tym celu powielamy wyżej opisany rysunek bez wektorów prędkości i tylko na nim (nie we wzorach) dokonujemy następujących zmian poprzez zastąpienie: O przez O_1, P_1 przez D_1, P_2 przez D_2, r przez vt, φ przez ω oraz s przez $2\pi vn = |\widehat{D_1D_2}|$. Wektor $\overrightarrow{a}_n$ o początku D_2 jest prostopadły do "promienia" vt i jest reprezentantem "uwalnianych" wektorów swobodnych. Mamy tu zatem "zamianę" ruchu po okręgu na ruch prostoliniowy, w którym "pochodnym hodografem" toru punktu jest po prostu droga prosta i otwarta z uwagi na "ustalony i niezmienny kąt równy ω".

Z tak opisanego rysunku dostajemy ostateczne potwierdzenie słuszności (2)

$$\frac{2\pi vn}{2\pi vt} = \frac{\omega}{\varphi_b}.$$

W układzie SI wymiary wielkości ν, ω i a_n wynoszą:

$$[\nu] = 1 \cdot \mathrm{s}^{-1} \quad \text{i} \quad [\omega] = \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} \quad \text{i} \quad [a_n] = \mathrm{m/s}^2.$$

Jeżeli

$\omega = \dfrac{n\varphi_b}{t}$ i $t = 1\mathrm{min}$, to $\omega = n\dfrac{\mathrm{obr}}{\mathrm{min}}$ i $\nu = n\dfrac{1}{\mathrm{min}}$, bo ω, n, ν **są parami różne**.

Jeżeli

$$\omega = \frac{n\varphi_b}{t} \ \text{ i } \ t = 1\mathrm{s}, \ \text{ to } \ \omega = 2\pi n\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \ \text{ i } \ \nu = n\frac{1}{\mathrm{s}}, \ \text{ bo } \ \omega \neq n \neq \nu \neq \omega.$$

W ruchu zmiennym po okręgu koła zmieniają się υ i ω oraz ν, przeto otrzymujemy **przyśpieszenie ilorazowe** (częstościowe obiegów)

$$a_i \stackrel{def}{=} \frac{\nu - \nu_0}{t} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{2\pi rt} = \frac{\omega - \omega_0}{\varphi_b t} \Longrightarrow a_i = \frac{a_t}{2\pi r} = \frac{\varepsilon}{\varphi_b},$$

gdzie ε - przyśpieszenie kątowe; a_t - przyśpieszenie styczne.

Dwa przykłady wykażą wagę tego opracowania dla dzieci.

1. Sprawdź prawidłowość wzoru liczbowego na prędkość liniową wyrażoną (zadaną) w m/s w ruchu jednostajnym obrotowym:

$$\upsilon = \frac{\pi dn}{1000 \cdot 60} ,$$

gdzie: d – średnica obracającego się ciała, wyrażona w mm;

n – droga liczbowa rzeczywista wszystkich punktów ciała o prędkości kątowej ω wyrażonej w obr/min.

Wzór wielkościowy na prędkość liniową brzmi

$$\upsilon = \frac{\pi d\omega}{\varphi_b} = \frac{\pi d\frac{\varphi}{t}}{\varphi_b} = \frac{\pi dn}{t}.$$

Przyjmujemy, że czas trwania ruchu $t = 60$ s. Skoro υ jest zdana w m/s, to wymiar wielkości d musi być wyrażony w metrach, a mianowicie

$$\upsilon = \frac{\pi d\omega}{\varphi_b} \Longrightarrow \upsilon\,[\mathrm{m/s}] = \frac{\pi d\,[\mathrm{mm}]\,\varphi_b \dfrac{n}{1\,[\mathrm{min}]}}{\varphi_b} = \frac{\pi d\,[\mathrm{m}]\,\dfrac{n}{60\,[\mathrm{s}]}}{1000} \Longrightarrow \upsilon = \frac{\pi dn}{1000 \cdot 60} .$$

2. Wzór wielkościowy $\upsilon = \omega r$ nie jest precyzyjny.

$$\frac{|\widehat{AB}|}{r} = \frac{\pi\varphi}{180^0} = 1 \Longrightarrow \left[\varphi = 1\mathrm{rad} \ \wedge \ \frac{\pi\,(1\mathrm{rad})}{180^0} = 1\right] \Longrightarrow$$

$$\left[1\mathrm{rad} \ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \approx \left(\frac{180}{3,1416}\right)^0 \approx 57,2956^0 \approx 57^0 + 0,2956 \cdot 60^{/} \approx\right.$$

$$\left. 57^0 + 17,736^{/} \approx 57^0 17^{/} + 0,736 \cdot 60^{//} \approx 57^0 17^{/} 44^{//} \ \wedge \ 2\pi \cdot \mathrm{rad} \ = 360^0\right].$$

$$\frac{|\widehat{AA}|}{r} = \frac{s}{r} = \boxed{\frac{2\pi r}{r}} = \frac{\pi\varphi}{180^0} = \boxed{2\pi} \Rightarrow \left[\varphi = \varphi_b = 2\pi \cdot \mathrm{rad} \ \wedge \ \frac{\pi\,(2\pi \cdot \mathrm{rad})}{180^0} = 2\pi\right].$$

Dlatego

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{2\pi rn}{t} = \frac{2\pi r\varphi}{t\varphi_b} = \frac{2\pi r\omega}{\varphi_b} \Longrightarrow \upsilon = \frac{\omega r}{\mathrm{rad}}. \ c.b.d.o.$$