PRZYŚPIESZENIE DOŚRODKOWE I ILORAZOWE

Leszek W. Guła
Lublin - RZECZPOSPOLITA POLSKA

12 stycznia 1997 – 08 października 2013

W ruchu obrotowym wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej prostej zwanej osią obrotu, która jest nieruchoma. Najważniejszy przypadek ruchu krzywoliniowego stanowi ruch punktu po okręgu koła ze stałą prędkością v. Wtedy każdy punkt różnie oddalony od ustalonego początku (środka O koła) promienia wodzącego r czyli różnie oddalony od początku wierzchołka kąta (ramienia drogi kątowej) φ ma inną prędkość liniową (obwodową) v_x, inną, prędkość polową u_x i inne przyśpieszenie dośrodkowe (normalne) a_{nx} – tym większe, im większy jest promień r_x, lecz prędkość kątowa ω i **prędkość ilorazowa** (częstość obiegów, częstość kołowa) ν wszystkich punktów należących do koła nie ulegają zmianie (w punkcie O koła wszystkie wielkości są równe 0). Ruch danego punktu wyrażają też inne niż prędkość v wielkości, takie jak: prędkość kątowa ω, **prędkość ilorazowa** ν (liczba obrotów wykonana w przyjętej jednostce czasu - równa odwrotności okresu obiegu T, częstotliwość okrążeń, częstość obiegów, częstość kołowa), prędkość polowa u i przyśpieszenie dośrodkowe a_n (normalne), które podobnie jak v są również wielkościami wektorowymi. Wtedy: droga liniowa s przebyta przez punkt umieszczony na końcowym ramieniu kąta (drogi kątowej) φ, droga kątowa φ zakreślona przez promień wodzący r, **droga ilorazowa rzeczywista** n (liczba obrotów wykonana w czasie t trwania ruchu, która jako liczba rzeczywista jest bez miana), pole S wycięte przez promień wodzący r, **droga łukowa (niewymierna k-ść prędkości)** $2\pi n v$ i średni przyrost geometryczny $|\Delta \overrightarrow{v}|_{\text{śr}}$ prędkości v są wprost proporcjonalne do czasu t trwania ruchu:

$$v \overset{\text{const.}}{=} \frac{s}{t}, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}, \quad \nu \overset{\substack{\text{def.kl.}\\ \text{const.}}}{=} \frac{n}{t} = \frac{1}{T}, \quad u = \frac{S}{t}, \quad a_n \overset{\substack{\text{def.kl.}\\ \text{const.}}}{=} \frac{2\pi n v}{t} \overset{\substack{\text{def.kl.}\\ \text{const.}}}{=} \frac{|\Delta \overrightarrow{v}|_{\text{śr}}}{\Delta t},$$

przy czym $\pi \approx 3,1416$, a liczba rzeczywista $n > 0$ określa, jakim ułamkiem rzeczywistym bazowej wielkości: czasu T (okresu obiegu) potrzebnego na jeden obrót (1 koło), drogi liniowej $2\pi r$, drogi kątowej φ_b, drogi polowej πr^2 jest rozpatrywana wielkość rzeczywista t, s, φ, S – co wyrażają proporcje

$$\boxed{n \overset{\text{nowa definicja}}{=} \frac{t}{T} = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\varphi}{\varphi_b} = \frac{S}{\pi r^2} = \frac{ut}{\pi r^2}\ ,}$$

gdzie $\varphi_b = 1 \text{ obr} = 360^0 = 2\pi \text{ rad}$.

Niech ruch punktu po okręgu będzie zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara oraz: $v = v_1 = v_2$, $\measuredangle P_1OP_2 = \varphi$, $r = |OP_1| = |OP_2|$, punkt P_1 będzie początkiem wektora $\overrightarrow{v}_1$ stycznego do okręgu (O, r) i zarazem początkiem ruchu, a punkt P_2 początkiem wektora $\overrightarrow{v}_2$ stycznego do tego okręgu.

Widzimy, że po czasie Δt droga przebyta przez punkt jest równa długości łuku $|\widehat{P_1P_2}| = s$. W punkcie P_2 zaczepiamy początek wektora przyśpieszenia dośrodkowego $\overrightarrow{a}_n$. Będzie on miał zwrot wzdłuż promienia r ku środkowi O koła. Wektory $\overrightarrow{v}_2$ i $\overrightarrow{a}_n$ są pod kątem prostym. Mamy $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{v}_2$, gdyż współrzędne tych wektorów są różne.

Z tak opisanego rysunku otrzymujemy

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\varphi}{\varphi_b} = n \;\Rightarrow\; s = \frac{2\pi r\varphi}{\varphi_b} = 2\pi rn.$$

Z powyższego następuje

$$\frac{vt}{2\pi r} = \frac{\varphi}{\varphi_b} = \frac{S}{\pi r^2} = \frac{t}{T} = n \;\Rightarrow\; \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{\varphi_b} = \frac{u}{\pi r^2} = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} = \nu.$$

Stąd otrzymujemy wzór wielkościowy i równoważne mu wzory na prędkość liniową v mierzoną po okręgu (łuku) koła

$$v \overset{\substack{\text{def.klasyczna}\\ \text{constans}}}{=} \frac{2\pi rn}{t} = \frac{2\pi r\omega}{\varphi_b} = \frac{2u}{r} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu.$$

Spośród wielu związków prędkości liniowej v z innymi wielkościami, w dalszej części tego tematu przyda się nam wzór wielkościowy na prędkosc kątową ramienia drogi kątowej φ

$$\omega = \frac{v\varphi_b}{2\pi r}.$$

Wyprowadzenie wzoru na przyśpieszenie dośrodkowe a_n.

Wzór na wielkość a_n wyprowadzimy za pomocą antyhodografu toru punktu, którym jest prosta. W tym celu powielamy wyżej opisany rysunek bez wektorów prędkości i tylko na nim (nie we wzorach) dokonujemy następujących zmian: za O wstawiamy O_1, za P_1 wstawiamy D_1, za P_2 wstawiamy D_2, za r wstawiamy vt i za kąt φ wstawiamy prędkość kątową ω. Za s wstawiamy $2\pi vn = |\Delta\overrightarrow{v}|_{\text{śr}}$, gdyż po tych zamianach musi być $|\widehat{D_1D_2}| = 2\pi vn = |\Delta\overrightarrow{v}|_{\text{śr}}$. Wektor $\overrightarrow{a}_n$ jest styczny w punkcie D_2 do okręgu i prostopadły do rosnącej drogi, tj. do 'promienia' vt. Wektor $\overrightarrow{a}_n$ jest reprezentantem 'uwalnianych' wektorów swobodnych. Mamy tu jak na dłoni zamianę ruchu po okręgu na ruch prostoliniowy, czyli na antyhodograf – drogę, którą wyznacza cały wektor $\overrightarrow{v}$ prędkości stałej v.

Z tak opisanego rysunku drugiego otrzymujemy

$$\boxed{\frac{2\pi nv}{2\pi vt} = \frac{\omega}{\varphi_b} \;\Rightarrow\; a_n \overset{\substack{\text{def.klasyczna}\\ \text{constans}}}{=} \frac{2\pi nv}{t} = \frac{2\pi\omega v}{\varphi_b} = \frac{2\pi\frac{v\varphi_b}{2\pi r}v}{\varphi_b} = \frac{v^2}{r}.}$$

Ponieważ

$$a_n = \frac{2\pi v n}{t} = 2\pi v \nu \ \text{ i } \ v = 2\pi r \nu \ \text{ i } \ \nu = \frac{\omega}{\varphi_b} = \frac{u}{\pi r^2}\ ,$$

to istotne związki a_n z wielkościami ω, u nietrudno odgadnąć, a mianowicie

$$a_n = 4\pi^2\nu^2 r = 4\pi^2\left(\frac{\omega}{\varphi_b}\right)^2 r = \frac{4\pi^2\omega^2 r}{\varphi_b^2} \ \text{ i } \ a_n = 4\pi^2\nu^2 r = 4\pi^2\left(\frac{u}{\pi r^2}\right)^2 r = \frac{4u^2}{r^3}.$$

W układzie SI wymiary wielkości ν, ω i a_n wynoszą:

$$[\nu] = 1\cdot \mathrm{s}^{-1} \ \text{ i } \ [\omega] = \mathrm{rad}\cdot \mathrm{s}^{-1} \ \text{ i } \ [a_n] = \mathrm{m/s}^2.$$

Jeżeli

$$\omega = \frac{n\varphi_b}{t} \ \text{ i } t = 1\,\mathrm{min}, \ \text{ to } \omega = n\frac{\mathrm{obr}}{\mathrm{min}} \ \text{ i } \nu = n\frac{1}{\mathrm{min}}, \ \text{bo } \omega, n, \nu \ \textbf{są parami różne}.$$

Jeżeli

$$\omega = \frac{n\varphi_b}{t} \ \text{ i } \ t = 1\ \mathrm{s}, \ \text{ to } \ \omega = 2\pi n\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \ \text{ i } \ \nu = n\frac{1}{\mathrm{s}}, \ \text{ bo } \ \omega \neq n \neq \nu \neq \omega.$$

W ruchu zmiennym po okręgu koła ze stałym **przyśpieszeniem ilorazowym** (częstościowym obiegów) a_i zmieniają się wielkości ν, v i ω. Oto klasyczna definicja tegoż przyśpieszenia

$$a_i \overset{\substack{\text{def.klasyczna} \\ \text{const.}}}{=} \frac{\nu - \nu_0}{t} = \frac{v - v_0}{2\pi r t} = \frac{\omega - \omega_0}{\varphi_b t} = \frac{a_t}{2\pi r} = \frac{\varepsilon}{\varphi_b}\ ,$$

gdzie ε - przyśpieszenie kątowe; a_t - przyśpieszenie styczne.

Wektor przyśpieszenia normalnego $\overrightarrow{a}_n$ powoduje jedynie zmianę kierunku prędkości $\overrightarrow{v}$ i ma ten sam początek jak wektor prędkości $\overrightarrow{v}_2$, w którym zawiera się wektor przyśpieszenia stycznego $\overrightarrow{a}_t$. Wektor $\overrightarrow{a}_t$ powoduje zmianę wartości bezwzględnej $|v|$ prędkości v. Wektor przyśpieszenia liniowego wypadkowy $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_t + \overrightarrow{a}_n$. Dlatego $a = 2\pi r\sqrt{a_i^2 + (2\pi\nu^2)^2}$.

KONKLUZJE, PRZYKŁADY.

1. Nie jest precyzyjny poniższy wzór wielkościowy $v = \omega r$.

DOWÓD.

$$\frac{|\widehat{AB}|}{r} = \frac{\pi\varphi}{180^0} = 1 \ \Rightarrow \ \left[\ \varphi = 1\ \mathrm{rad} \ \ \wedge \ \ \frac{\pi\,(1\ \mathrm{rad})}{180^0} = 1\ \right] \ \Rightarrow$$

$$1\ \mathrm{rad}\ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \approx \left(\frac{180}{3,1416}\right)^0 \approx 57,2956^0 \approx 57^0{+}0,2956{\cdot}60^{/} \approx 57^0{+}17,736^{/} \approx$$

$$57^0 17^{/} + 0,736\cdot 60^{//} \approx 57^0 17^{/} 44^{//}.$$

Ponadto

$$\frac{|\widehat{AA}|}{r} = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = \frac{\pi\varphi}{180^0} = 2\pi \;\Rightarrow\; \left[\varphi = 2\pi \text{ rad} \quad\wedge\quad \frac{\pi\,(2\pi \text{ rad})}{180^0} = 2\pi\right] \;\Rightarrow$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^0.$$

Dlatego

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi rn}{t} = \frac{2\pi r\varphi}{t\varphi_b} = \frac{2\pi r\omega}{\varphi_b} \;\Rightarrow\; v = \frac{\omega r}{\text{rad}}.$$

2. Przyśpieszenie dośrodkowe normalne dane jest wzorem

$$a_n = \frac{2\pi nv}{t} = \frac{2\pi\varphi v}{t\varphi_b} = \frac{2\pi\omega v}{\varphi_b} = \frac{2\pi\frac{v\varphi_b}{2\pi r}v}{\varphi_b} = \frac{v^2}{r}.$$

3. Wykaż, że $us = vS$.

$$n = \frac{s}{2\pi r} = \frac{S}{\pi r^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{s}{S} = \frac{2}{r} \wedge \frac{v}{2} = \frac{u}{r}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{r} = \frac{s}{2S} = \frac{v}{2u} \;\Rightarrow\; us = vS.\ c.n.w.$$

4. Sprawdź prawidłowość wzoru liczbowego na prędkość liniową wyrażoną (zadaną) w m/s w ruchu jednostajnym obrotowym:

$$v = \frac{\pi\cdot d\cdot n}{1000\cdot 60},$$

gdzie: d – średnica obracającego się ciała wyrażona w mm – bez miana;

n – droga liczbowa przebyta przez obracające się ciało z prędkością obrotową (kątową) ω – obrotową i kątową, bo wyrażaną w [obr/min], bowiem jeden obrót jest kątem pełnym, a jego część jest kątem również, co potwierdzają relacje równości

$$\omega = \nu\varphi_b = \frac{n}{t}\varphi_b = \frac{\varphi}{\varphi_b\cdot t}\varphi_b = \frac{\varphi}{t} = \omega.$$

Prędkość liniową po okręgu koła określają następujące wzory wielkościowe

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi d\omega}{\varphi_b} = \frac{\pi dn}{t} = \pi d\nu,$$

gdzie n jest drogą liczbową pokonywaną w czasie Δt, przy czym do obliczeń bierzemy liczbę n, która jest '**drogą ilorazową pokonaną**' w czasie $t = \Delta t$.

Przyjmujemy, że czas trwania ruchu wynosi $t = 1\,[\text{min}]$. Skoro v zadana jest w [m/s], to wymiary wielkości d, ω i t wyraźmy odpowiednio w metrach, rad/s i w sekundach, a mianowicie

$$v = \frac{\pi d\omega}{\varphi_b} \;\Rightarrow\; v\cdot[\text{m/s}] = \frac{\frac{\pi\cdot d}{1000}\,[\text{m}]\cdot\frac{2\pi n}{60}\,[\text{rad/s}]}{2\pi\,[\text{rad}]} \;\Rightarrow\; v = \frac{\pi\cdot d\cdot n}{1000\cdot 60}.$$

Wyniki będą identyczne dla $v = \pi dn/t$ i dla $v = \pi d\nu$.